

Deformação de Objetos 2D Utilizando Curvas de Bézier e Mínimos Quadrados Móveis

Douglas Cedrim
Instituto de Computação - UFAL
{dco@tci.ufal.br}

Adelailson Peixoto (Orientador)
Instituto de Matemática - UFAL
{adelailson@pos.mat.ufal.br}

Resumo

Este trabalho apresenta um método para deformar espacialmente objetos 2D através da manipulação de curvas de Bézier. O objetivo é aumentar o controle do usuário sobre a deformação. O trabalho emprega a abordagem proposta por [8] de mínimos quadrados móveis para computar as deformações e aplicá-las na imagem a uma complexidade polinomial.

1. Introdução

Alguns dos principais desafios enfrentados na deformação de imagens estão ligados à especificação da deformação, que requer ferramentas que dêem ao usuário um controle real sobre a deformação [6, 9]. A partir da especificação os algoritmos de deformação são aplicados aos objetos. No caso de imagens [11, 2, 8], a especificação inclui pontos, segmentos de retas, curvas, regiões e outros. Matematicamente, uma deformação pode ser definida como uma transformação que leva pontos de um objeto gráfico a outro. Este trabalho tem como principal objetivo deformar imagens especificadas a partir de curvas. Algumas aplicações de deformação estão ligadas à animação de *cartoons*, onde os objetos-chave, definidos por deformações, são interpolados para criar transições suaves entre eles [4]. Na área médica [3] as deformações são utilizadas na análise e reconstrução de modelos a partir de dados de tomografia, ressonância magnética. Outras aplicações estão ligadas ao *Morphing* de objetos [10], entretenimentos e outros.

Diversos trabalhos calculam deformações de imagens através de estruturas auxiliares, sobre as quais a deformação é especificada [11, 2, 6]. Em [6] é utilizada uma estrutura quadtree sobre a qual a deformação é calculada e então repassada aos objetos através de funções de base radial. O cálculo emprega a minimização da energia entre cada duas células vizinhas da quadtree. Apesar de apresentar bons resultados, em geral estes métodos exigem muito

esforço na implementação de diversos algoritmos. Em [8] as deformações são especificadas por pontos e linhas, em seguida seu cálculo emprega mínimos quadrados móveis para computar as novas posições dos pontos da imagem. A abordagem aqui apresentada, porém, estende a especificação de [8] para *splines de Bézier*, dando ao usuário um maior controle sobre a deformação.

2. Fundamentação

Esta seção traz uma breve abordagem sobre curvas de Bézier [7] e em seguida serão vistos os *mínimos quadrados móveis* e sua extensão com linhas [8].

2.1. Curvas de Bézier

Dados k pontos P_0, P_1, \dots, P_k , uma curva paramétrica c de Bézier de grau $k - 1$ é descrita como

$$c(t) = \sum_{i=0}^k P_i b_{k,i}(t), \quad (1)$$

onde $b_{k,i}$ é o i -ésimo coeficiente polinomial de Bernstein, definido como segue

$$b_{k,i}(t) = \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} \quad (2)$$

2.2. Mínimos Quadrados Móveis

Seja p um ponto de uma imagem I e sejam x_i, y_i pontos não deformados e deformados, respectivamente, especificados em I . Para cada ponto p , deve-se encontrar a função de deformação apropriada f , que irá mapear os pontos de controle x_i nos pontos deformados y_i e utilizá-la para deformar p . Ou seja, f deve minimizar a função ponderada

$$\sum_i w_i \|f(x_i) - y_i\|^2 \quad (3)$$

Como f é computada para cada $p \in I$ e a influência dos pontos de controle x_i varia de acordo com a distância, o peso w_i deve ser dependente do ponto avaliado ¹.

Assim, w_i aumenta à medida que p se aproxima dos pontos x_i . Em [8], o peso w_i é dado por

$$w_i = \|x_i - p\|^{-\alpha},$$

sendo suave para qualquer $\alpha \geq 2$.

Como $f_m(p)$ é uma transformação afim, ou seja, $f_m(p) = pM + T$, podemos reescrever (3) em sua forma matricial, o que leva à equação

$$\min \sum_i w_i \|(x_i M + T) - y_i\|^2 \quad (4)$$

Resolvendo a equação acima para T, tem-se

$$T = y_c - x_c M,$$

logo

$$\min \sum_i w_i \|\hat{x}_i M - \hat{y}_i\|^2, \quad (5)$$

onde $\hat{x}_i = x_i - x_c$ e $\hat{y}_i = y_i - y_c$ com

$$x_c = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i},$$

$$y_c = \frac{\sum_i w_i y_i}{\sum_i w_i}$$

2.3. Mínimos Quadrados Móveis com Segmentos de Linha

Em [8] Schaefer estende o controle da deformação para segmentos de retas $x_i(t)$, $y_i(t)$, em vez de pontos. Assim, o problema de minimização passa a ser

$$\sum_i \int_0^1 w_i(t) \|\hat{x}_i(t)M - \hat{y}_i(t)\|^2,$$

onde a integral representa um grande conjunto de pontos de amostra,

$$w_i(t) = \|x'_i(t)\|(\|x_i(t) - p\|)^{-2\alpha}$$

representa uma função de peso modificada que é independente da parametrização da curva e

$$\hat{x}_i(t) = x_i(t) - x_c, \quad \hat{y}_i(t) = y_i(t) - y_c$$

são as curvas de controle transladadas pelos centróides definidos a seguir

$$x_c = \frac{\sum_i \int_0^1 w_i(t) x_i(t) dt}{\sum_i \int_0^1 w_i(t) dt}$$

$$y_c = \frac{\sum_i \int_0^1 w_i(t) y_i(t) dt}{\sum_i \int_0^1 w_i(t) dt}$$

3. Método

Aqui, a idéia de [8] é estendida para curvas de controle genéricas. As curvas de controle a serem usadas na deformação são definidas como:

$$\hat{x}_i(t) = \begin{pmatrix} 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}_i(t) = \begin{pmatrix} 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_i \\ \hat{d}_i \end{pmatrix}$$

onde $(\hat{a}_i, \hat{b}_i) = (a_i - x_c, b_i - y_c)$ são os pontos inicial e final da curva não deformada devidamente transladados e $(\hat{c}_i, \hat{d}_i) = (c_i - x_c, d_i - y_c)$ os pontos inicial e final da curva deformada.

Inicialmente, resolve-se para uma família mais geral de matrizes, contendo todo tipo de transformação afim, para então desenvolver transformações mais específicas e resultados visuais melhores. Como pode-se ver em [5], a transformação varia de acordo com o ponto avaliado.

3.1. Deformações Afins

A solução do problema inicial de minimização, mais especificamente da equação (5), será determinada pelos pontos críticos, obtendo assim a matriz que minimiza o quadrado dos desvios de cada deformação. Através disso, obtem-se uma matriz geral bem definida para cada ponto p pertencente à imagem, que irá representar a transformação afim que é solução do problema para aquele ponto. Dessa forma, expandindo (5) e resolvendo para M , tem-se

$$M_p = \left(\sum_i \hat{x}_i^T w_i \hat{x}_i \right)^{-1} \left(\sum_j \hat{x}_j^T \hat{y}_j w_j \right),$$

onde \hat{x}_i são os pontos de controle não deformados e \hat{y}_i os deformados.

Uma vez que foco não está no uso de pontos como controladores da deformação, mas sim curvas de Bézier, elas cumprem esse papel de melhorar o controle sobre a deformação. Assim, utilizando a definição de curvas através da multiplicação de dois vetores (3), as equações são

$$\sum_i \int_0^1 \left\| \begin{pmatrix} 1-t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{pmatrix} M - \begin{pmatrix} \hat{c}_i \\ \hat{d}_i \end{pmatrix} \right\|^2, \quad (6)$$

¹ Ver [5] para maiores detalhes.

onde, resolvendo para M , teremos

$$M_a = (M_1)^{-1} \sum_j \begin{pmatrix} \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \end{pmatrix}^T W_j \begin{pmatrix} \hat{c}_j \\ \hat{d}_j \end{pmatrix}, \quad (7)$$

com

$$M_1 = \left(\sum_i \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{pmatrix}^T W_i \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{pmatrix} \right) \quad (8)$$

onde

$$W_j = W_i = \begin{pmatrix} w_{i,0} & w_{i,1} \\ w_{i,1} & w_{i,2} \end{pmatrix}$$

sendo cada w_i a avaliação das integrais

$$w_{i,0} = \int_0^1 w_i(t)(1-t)^2 dt$$

$$w_{i,1} = \int_0^1 w_i(t)(1-t) dt$$

$$w_{i,2} = \int_0^1 w_i(t)t^2 dt$$

Os centróides para os segmentos de linhas x_c, y_c podem ser calculados utilizando essas integrais. Assim

$$x_c = \frac{\sum_i a_i(w_{i,0} + w_{i,1}) + b_i(w_{i,1} + w_{i,2})}{\sum_i w_{i,0} + 2w_{i,1} + w_{i,2}}$$

$$y_c = \frac{\sum_i c_i(w_{i,0} + w_{i,1}) + d_i(w_{i,1} + w_{i,2})}{\sum_i w_{i,0} + 2w_{i,1} + w_{i,2}}$$

Uma vez que trata-se de uma família geral de transformações afins, cisalhamento e escala não uniforme fazem parte dessas transformações, não preservam a rigidez da deformação, conseqüentemente seu realismo.

3.2. Deformações por Similaridade

A partir das transformações afins, obtem-se outra família mais restrita de matrizes de forma a eliminar o cisalhamento das imagens, tornando a deformação quase rígida, a menos de uma escala não uniforme ([8]). Assim é determinada uma transformação afim com a propriedade de que sua matriz M , seja tal que $M^T M = \lambda^2 I$, onde λ é um real. Para determinar a matriz, é preciso apenas calcular sua primeira coluna $v1 = (a, b)$, de forma que, $\langle v1, v2 \rangle = 0 \Rightarrow v2 = (-b, a) = v1^\perp$. Seja a matriz

$$M' = [v1 \quad v1^\perp]$$

Assim teremos

$$\min \sum_i \int_0^1 \left\| A(t) \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ -\hat{a}_i^\perp \\ \hat{b}_i \\ -\hat{b}_i^\perp \end{pmatrix} M' - \begin{pmatrix} \hat{c}_i^T \\ \hat{d}_i^T \end{pmatrix} \right\|^2, \quad (9)$$

com

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 & t & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

onde, resolvendo para M' , passaremos a ter,

$$M_s = \frac{\sum_i \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ -\hat{a}_i^\perp \\ \hat{b}_i \\ -\hat{b}_i^\perp \end{pmatrix}^T W_i \begin{pmatrix} \hat{c}_i^T & -\hat{c}_i^{\perp T} \\ \hat{d}_i^T & -\hat{d}_i^{\perp T} \end{pmatrix}}{\mu_s} \quad (10)$$

com

$$\mu_s = \sum_i \|\hat{a}_i\|^2 w_{i,0} + 2 \langle \hat{a}_i, \hat{b}_i \rangle w_{i,1} + \|\hat{b}_i\|^2 w_{i,2}$$

e a matriz de ordem 4 dos pesos ([8]) definida como

$$W_i = \begin{pmatrix} w_{i,0} & 0 & w_{i,1} & 0 \\ 0 & w_{i,0} & 0 & w_{i,1} \\ w_{i,1} & 0 & w_{i,2} & 0 \\ 0 & w_{i,1} & 0 & w_{i,2} \end{pmatrix}$$

3.3. Deformações Rígidas

Restringir as transformações afins para que não possuam nem cisalhamento, nem escala não uniforme equivale a minimizar (9) sujeito a $M^T M = I$. Esse problema assemelha-se ao anterior, e pode ser resolvido de forma análoga a menos da mudança do fator de escala μ_s para um

$$\mu_r = \left\| \sum_i \begin{pmatrix} \hat{a}_i^T & -\hat{a}_i^{\perp T} & \hat{b}_i^T & -\hat{b}_i^{\perp T} \end{pmatrix} W_i \begin{pmatrix} \hat{c}_i^T \\ \hat{d}_i^T \end{pmatrix} \right\|$$

Assim, não é necessário efetuar decomposições de auto-vetores para determinar a melhor transformação [1].

4. Resultados

A figura 1 mostra a especificação e a deformação rígida de uma garrafa. A figura 2 deforma localmente o olho do falcão. A figura 3 mostra a relação entre o número de amostras da curva e o tempo de processamento.

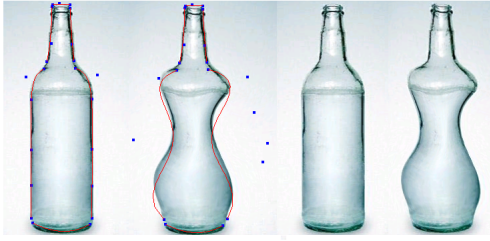


Figura 1. Deformação de uma Garrafa.



Figura 2. Deformação de um Falcão.

5. Conclusões e Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou uma ferramenta de deformação de imagens utilizando curvas de Bézier para especificar a deformação. O método, baseado em [8], emprega mínimos quadrados móveis para calcular as novas posições dos pixels da imagem a partir da especificação. O uso de curvas permite ao usuário ter um maior controle ao especificar a deformação da imagem, tornando-a mais intuitiva. Como trabalhos futuros temos: a manipulação direta das curvas splines durante a especificação da deformação, em vez de manipular seus pontos de controles; o desenvolvimento de outras ferramentas para deformar a imagem; um estudo de técnicas para impedir dobras da grade de modo a evitar sobreposição de pixels durante a deformação da imagem.

Referências

- [1] B. K. P. Horn. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. In *J. Opt. Soc. Am. A* 4, page 629, 1987.
- [2] T. Igarashi, T. Moscovich, and J. F. Hughes. As-rigid-as-possible shape manipulation. In *SIGGRAPH '05: ACM SIGGRAPH 2005 Papers*, pages 1134–1141, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [3] T. Ju, J. Warren, G. Eichele, C. Thaller, W. Chiu, and J. Carson. A geometric database for gene expression data. In *SGP '03: Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 166–176, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2003. Eurographics Association.
- [4] A. Kort. Computer aided inbetweening. In *NPAR '02: Proceedings of the 2nd international symposium on Non-*

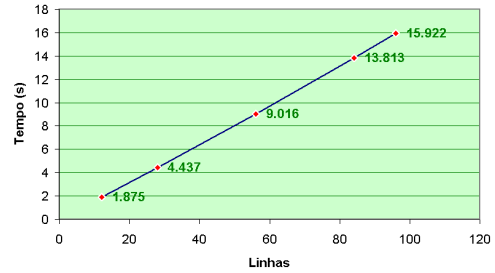


Figura 3. Amostras em Função do Tempo.

photorealistic animation and rendering, pages 125–132, New York, NY, USA, 2002. ACM.

- [5] A. Nealen. An as-short-as-possible introduction to the least squares, weighted least squares and moving least squares methods for scattered data approximation and interpolation. 2004.
- [6] A. Nealen. Adaptive space deformations based on rigid cells. *EUROGRAPHICS Comput. Graph.*, 26(3), 2007.
- [7] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book*. Springer, 2 edition, 1996.
- [8] S. Schaefer, T. McPhail, and J. Warren. Image deformation using moving least squares. In *SIGGRAPH '06: ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, pages 533–540, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [9] T. W. Sederberg and S. R. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 20(4):151–160, 1986.
- [10] D. B. Smythe. A Two-Pass Mesh warping algorithm for object transformation and image interpolation. Technical report, 1990.
- [11] Y. Weng, W. Xu, Y. Wu, K. Zhou, and B. Guo. 2d shape deformation using nonlinear least squares optimization. *Vis. Comput.*, 22(9):653–660, 2006.