

Fecho Convexo e o paradigma *Rotating Calipers*

Renato de J. Manzoni
Aluno de Graduação
Bacharelado em Ciência da Computação
FCT/UNESP - Campus de P. Prudente
rjmanzoni@gmail.com

Marco A. Piteri (orientador)
Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP
Depto de Matemática, Estatística e Computação
Rua Roberto Simonsen, 305, Caixa Postal 467
Presidente Prudente, SP, Brasil
piteri@fct.unesp.br

Resumo

O desenvolvimento e a busca por eficientes abordagens algorítmicas voltadas para a obtenção da estrutura topológica e combinatória do fecho convexo de um conjunto de n pontos em \mathbb{R}^n é um dos problemas mais estudados na área de Geometria Computacional e historicamente foi um dos primeiros problemas geométricos a ser completamente analisado no plano. Uma outra importante característica associada ao fecho convexo é que outros problemas geométricos são facilmente resolvidos a partir de sua existência. Este trabalho explora o uso do paradigma de *rotating calipers* associado a estrutura do fecho convexo de um conjunto de n pontos no plano e mostra como estas duas abordagens podem solucionar vários outros problemas de natureza geométrica.

1. Introdução

O problema de se encontrar a estrutura do fecho convexo de um conjunto de n pontos no espaço \mathbb{R}^n possui inúmeros interesses teóricos e práticos. Entretanto, as aplicações mais imediatas estão associadas às dimensões 2 e 3, como por exemplo: detecção de colisão [1] em movimentos de robôs, cálculo da área/volume mínimo necessário para envolver um objeto 2D/3D e análise de formas [2], para citar algumas. De modo a limitar a abrangência do tema, no contexto desse trabalho vamos restringir a discussão ao espaço euclidiano de dimensão 2.

Formalmente, o fecho convexo de um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^2 , vamos denotar por $Conv(S)$, é o menor conjunto convexo que contém todos os pontos de S . Existem inúmeras e eficientes abordagens algorítmicas para se encontrar a solução desse problema, de forma exata ou aproximada [2] e já implementamos várias delas num projeto de iniciação científica suportado pela FAPESP. Contudo, o objetivo central desse trabalho é ilustrar como o paradigma

de *rotating calipers* pode ser combinado com a estrutura do fecho convexo para solucionar problemas de natureza geométrica envolvendo conjunto de pontos no plano, como por exemplo, o seu diâmetro [3], ou, as cascas convexas desse conjunto, a partir das quais é possível obter o nível de profundidade de um ponto no respectivo conjunto, ou ainda, uma triangulação dos pontos dados [5]. Além disso, vamos explorar como a idéia de *rotating calipers* pode ser usada para encontrar as tangentes inferior e superior, que é um passo construtivo fundamental para a obtenção da estrutura do fecho convexo quando se usa o princípio de *divide and conquer* [4]. Vale salientar ainda que a estrutura topológica do fecho convexo está diretamente relacionada a outras duas importantes subdivisões planares associadas a um conjunto de pontos arbitrários, mais especificamente, a *Triangulação de Delaunay* e o seu dual, que é o *Diagrama de Voronoi* [2].

2. Diâmetro do Fecho Convexo

Dado um conjunto de pontos $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$, $S \subseteq \mathbb{R}^2$, o diâmetro de S ($diam(S)$) é dado pela medida d_{max} que maximiza a distância Euclideana entre quaisquer pares de pontos em S . Esta definição pode ser formalizada pela relação (1), dada abaixo.

$$d_{max} = \max\{d(p_i, p_j), \forall p_i, p_j \in S, 1 \leq i < j \leq n\} \quad (1)$$

É fácil verificar que o par de pontos mais distantes de S está necessariamente em seu fecho convexo. Em outras palavras, o diâmetro de S é igual ao diâmetro dos pontos pertencentes ao $Conv(S)$. Existem algumas alternativas para se obter o $diam(S)$ a partir da existência de $Conv(S)$, mas no contexto desse trabalho vamos ilustrar a solução baseada no princípio de *rotating calipers* desenvolvida por Shamos [3].

Um par de pontos (p, q) no fecho convexo é denominado antipodal se existirem dois hiperplanos paralelos l_1 e

l_2 passando por p e q respectivamente, tal que, todos os outros pontos do fecho convexo estão entre l_1 e l_2 . A Figura 1 ilustra diagramaticamente esse conceito. A partir dessa mesma figura é possível observar que o diâmetro de um conjunto arbitrário S é dado por um par de pontos antipodal. Além disso, todos os pares de pontos antipodais se localizam em $Conv(S)$. Logo, para determinar o diâmetro de um conjunto S qualquer, é suficiente encontrar todos os pares de pontos antipodais e verificar aquele que maximiza a distância entre eles.

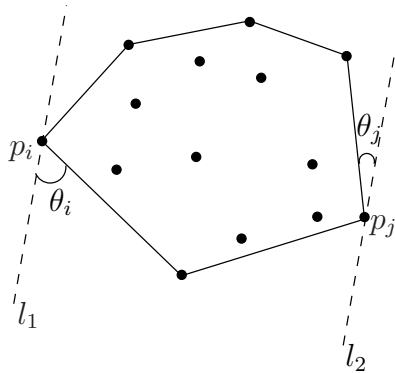


Figura 1. O par de pontos (p_i, p_j) é antipodal.

Para entender o processo de como todos os pares de pontos antipodais podem ser identificados, vamos considerar o polígono convexo ($Conv(S)$) da Figura 2, cujos pontos estão orientados no sentido anti-horário e determinar aqueles que são antipodais com relação ao ponto p_i .

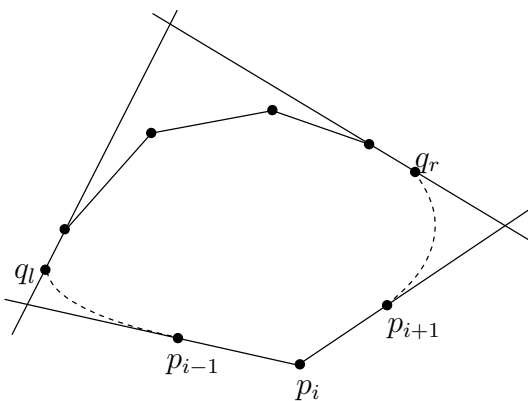


Figura 2. Encontrando todos os pontos $q \in Conv(S)$, tal que (p_i, q) seja antipodal.

Percorrendo os pontos no sentido anti-horário, encontra-

mos o ponto q_r , tal que, a distância entre a reta suporte passando pelo segmento $\overline{p_{i-1}p_i}$ a q_r , seja a maior possível. Semelhantemente, a partir de p_i e, “caminhando” no sentido horário, encontramos o ponto q_l , tal que, a distância entre a reta suporte passando por $\overline{p_i p_{i+1}}$ a q_l seja maximizada. Logo, a cadeia de pontos entre q_r e q_l (sentido anti-horário), incluindo seus extremos, define o conjunto $C(p_i)$ de pontos que formam pares antipodais com relação ao ponto p_i . Essa idéia é repetida para os demais pontos, o que permite identificar todos os pares de pontos antipodais. Devemos observar que essa abordagem não exige em nenhum momento a necessidade do cálculo de ângulos, aumentando a eficiência do processo computacional envolvido.

Para explorar e entender um pouco mais a idéia intuitiva do uso do paradigma *rotating calipers* aplicado na obtenção dos pares de pontos antipodais, vamos considerar a Figura 1, onde pode ser observado que o par de pontos (p_i, p_j) são antipodais. Essa conclusão pode ser corroborada por meio da observação das retas tangentes l_1 e l_2 , que passam por p_i e p_j , respectivamente. Vamos considerar ainda que os pontos pertencentes ao polígono convexo estejam orientados no sentido anti-horário.

Para encontrar o próximo ponto antipodal em relação a p_i , seja θ_i o ângulo formado pela reta l_1 com a aresta $\overline{p_i p_{i+1}}$ e θ_j , o ângulo entre a reta l_2 com a aresta $\overline{p_j p_{j+1}}$, ver Figura 1. Se $\theta_j < \theta_i$, então rotacionamos ambas as retas de um ângulo igual a θ_j , encontrando o ponto p_{j+1} que é antipodal com relação a p_i . Este procedimento continua até voltarmos à posição original.

3. Triângulação de Pontos a partir de Cascas Convexas

As *cascas convexas* de um conjunto de pontos S pode ser obtida a partir da aplicação sistemática do algoritmo de fecho convexo. Inicialmente, o algoritmo é aplicado ao conjunto original de pontos S , dando origem a primeira camada convexa. Em seguida, o conjunto de pontos pertencentes a $Conv(S)$ é retirado de S , e, sobre o conjunto resultante, executa-se novamente o algoritmo de fecho convexo, o que resulta na segunda camada. Esse procedimento é repetido até que não haja mais pontos para serem trabalhados. A Figura 3 ilustra um exemplo de cascas convexas obtidas a partir de um conjunto de pontos arbitrário.

Encontrar as cascas convexas de um conjunto de pontos S , permite que possamos obter a *profundidade convexa* de um ponto p_i qualquer neste conjunto, que é definida como o número de cascas convexas que devem ser removidas de S , até que p_i seja um ponto extremo. Assim, os pontos com profundidade convexa 0 são aqueles que pertencem a $Conv(S)$. Por outro lado, os pontos com profundidade convexa 1 são todos os pontos pertencentes a $Conv(S - Conv(S))$. Em outras palavras, os pontos do

fecho convexo obtido a partir da remoção do conjunto S , dos pontos $Conv(S)$. Entretanto, nosso maior interesse na determinação das cascas convexas de um conjunto de pontos $S \subseteq \mathbb{R}^2$, é obter uma triângulação desses pontos. Para esse propósito é necessário definirmos o conceito de *anel*, que é a região planar compreendida entre duas cascas convexas consecutivas, conforme pode ser observado na Figura 4.

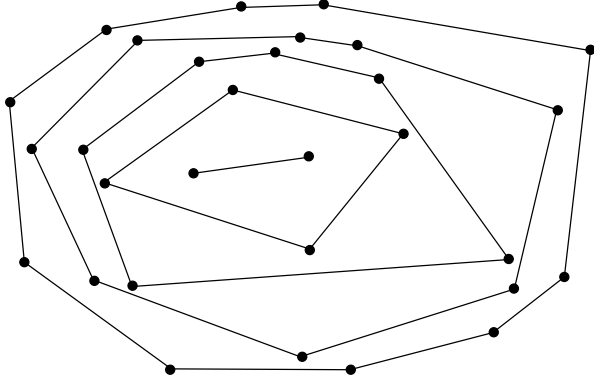


Figura 3. Exemplo de cascas convexas associadas a um conjunto de pontos no plano.

O algoritmo de triângulação de pontos no plano a partir das cascas convexas e que utiliza a idéia de *rotating calipers* é devido a Toussaint [5] e possui complexidade de tempo linear.

Sejam P e Q dois conjuntos de pontos orientados no sentido anti-horário e associados, respectivamente, a duas cascas convexas simultâneas em S . Todas as arestas pertencentes as cascas convexas são também arestas da triângulação de S , portanto, é suficiente obter as arestas localizadas no anel formado por P e Q . O passo inicial é computar os pontos de abscissa mínima p_i e q_j nos conjuntos P e Q , respectivamente. A aresta ligando ambos pertence a triângulação. A Figura 4 ilustra diagramaticamente a descrição acima. Em seguida, contrói-se as retas de suportes verticais l_p e l_q (*calipers*) passando pelos pontos p_i e q_j , respectivamente.

O próximo passo é rotacionar (*rotating*) essas retas no sentido anti-horário até que uma delas coincida com uma das arestas de P e Q , encontrando um novo vértice (p_{i+1} ou q_{j+1}), que por sua vez dará origem a uma nova aresta da triângulação. Se este vértice pertencer a P , então, a aresta resultante será (p_{i+1}, q) , caso contrário, a nova aresta será definida por (p, q_{j+1}) . No caso de ambas as retas suportes coincidirem com as arestas (arestas paralelas), é indiferente escolher uma ou outra. Este procedimento é repetido até alcançar novamente os pontos de origem p_i e q_j . É importante observar que a triângulação obtida a partir dessa

técnica pode ser facilmente convertida numa *triângulação de Delaunay* por meio da aplicação do princípio de *edge-flip* [2].

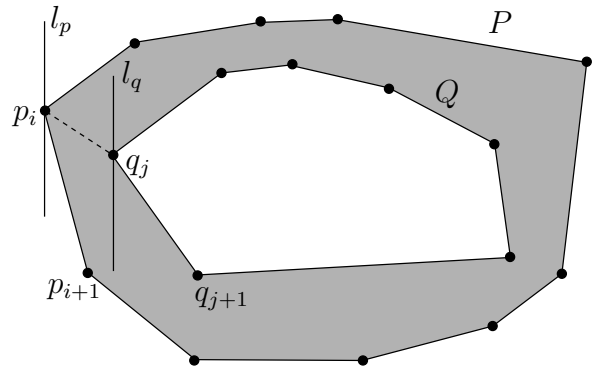


Figura 4. Triângulação de pontos a partir do princípio de *rotating calipers* aplicado a região sombreada denominada *anel*.

4. Combinando Fechos Convexos

Uma outra aplicação do princípio de *rotating calipers* é na obtenção das tangentes inferior e superior necessárias para obter a união de dois conjuntos convexas arbitrários e disjuntos, mantendo-a convexa. Esse passo construtivo é utilizado para encontrar $Conv(S)$ a partir da abordagem *dividir-para-conquistar* [2].

Para combinar (unir) dois fechos convexas intermediários P e Q , devemos encontrar os pontos $p_t, p_k \in P$ e $q_r, q_s \in Q$, tal que, os segmentos $\overline{p_t q_r}$ e $\overline{p_k q_s}$, sejam tangentes aos conjuntos P e Q e os pontos de ambos os conjuntos estejam compreendidos entre as tangentes. Em outras palavras, se olharmos para cada tangente individualmente, os pontos de $P \cup Q$ estão de um mesmo lado.

Toussaint [4] propôs aplicar a noção de *rotating calipers* para identificar essas retas tangentes. Vale salientar que esse mesmo passo algorítmico é usado para solucionar vários outros problemas na área de Geometria Computacional.

Para resolver o problema de encontrar os pares de pontos que dão origem as retas tangentes que resolva o problema proposto, é necessário conhecer o conceito de pares de pontos co-podais. Dados dois polígonos P e Q , um par de pontos (p, q) ($p \in P$ e $q \in Q$) é denominado co-podal entre P e Q , se os respectivos polígonos admitem retas de suporte passando por p e q , respectivamente, que sejam paralelas. A Figura 5 ilustra um par de pontos co-podal.

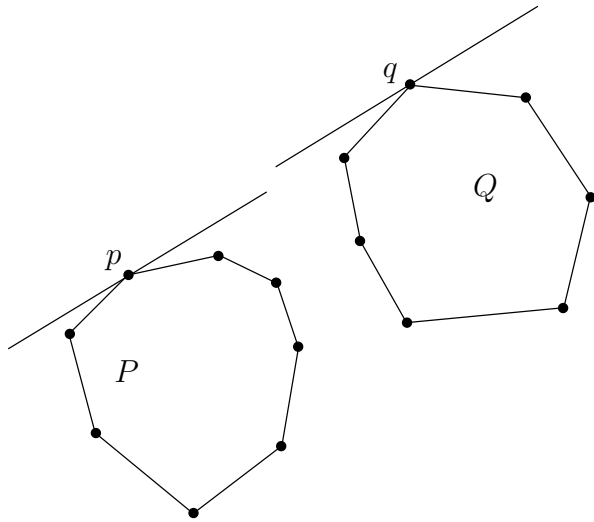


Figura 5. Exemplo de um par de pontos (p, q) co-podal.

Dois vértices $p_i \in P$ e $q_j \in Q$ pertencem a uma das tangentes procurada, se e somente se, eles satisfazem as duas condições abaixo:

condição 1 os vértices p_i e q_j formam um par *co-podal*;

condição 2 os vértices p_{i-1} , p_{i+1} , q_{j-1} e q_{j+1} , estão todos de um mesmo lado em relação ao segmento de reta $\overline{p_i q_j}$.

A Figura 6 ilustra o exemplo do par de pontos p_i e q_j que é co-podal, porém, não satisfaz a **condição 2**. Assim, não pode ser uma tangente que define uma aresta de $P \cup Q$. Observe ainda que na Figura 6, os pontos p_{i-1} e q_{j-1} referenciados na **condição 2** estão representados por p_k e q_r , respectivamente.

A partir desses conceitos é fácil elaborar um algoritmo para encontrar as duas tangentes de interesse, já que os pares co-podais são gerados durante o *rotating calipers*. Logo, é suficiente verificar se os vértices adjacentes aos pares de vértices co-podais, situam-se de um mesmo lado em relação a uma reta suporte passando pelos vértices co-podais. Caso isto seja satisfeito, os vértices co-podais são os pontos que definem as tangentes procuradas. No caso do exemplo dado na Figura 6, os pares de pontos co-podais são formados por (p_t, q_r) (tangente superior) e (p_k, q_s) (tangente inferior).

5. Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho investiga a aplicação do paradigma de *rotating calipers* combinado com a estrutura do fecho convexo, objetivando simplificar a solução de problemas envolvendo conjunto de pontos no plano. Além disso, ilustra como esse

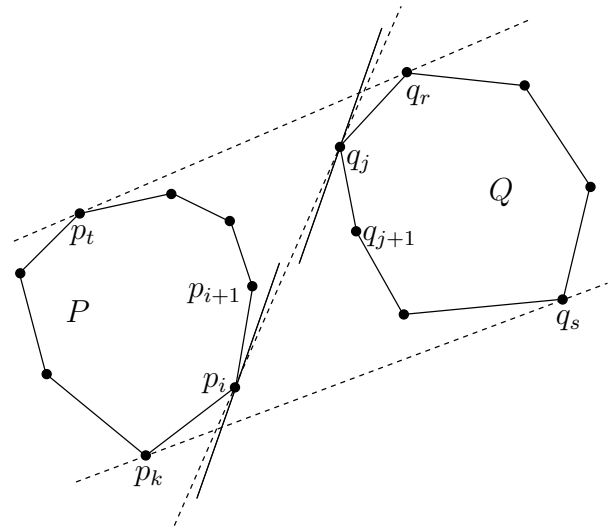


Figura 6. Obtenção de retas tangentes usando o conceito de par de pontos co-podal.

método pode ser usado de forma eficiente para a obtenção de tangentes específicas associadas a dois polígonos convexos. Esse passo construtivo é muito comum em problemas geométricos cuja solução envolve o paradigma de *dividir-para-conquistar*. Na continuidade do trabalho, pretendemos verificar possíveis aplicações do problema do cálculo do diâmetro de um conjunto de pontos, fazendo uso de outras métricas.

Agradecimentos

O autor e o co-autor agradecem a FAPESP pela bolsa de Iniciação Científica concedida, bem como os pareceristas do artigo pelas sugestões apresentadas, que em muito contribuíram para a qualidade final do trabalho.

Referências

- [1] T. Lozano-Pérez and M. A. Wesley. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles. *Commun. ACM*, 22(10):560–570, 1979.
- [2] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational geometry: An Introduction*. Springer-Verlag, 1988.
- [3] M. Shamos. *Computational geometry*. PhD thesis, Yale University, 1978.
- [4] G. Toussaint. Solving geometric problems with the rotating calipers. *Proc. MELECON*, 1983.
- [5] G. T. Toussaint. A linear-time algorithm for solving the strong hidden-line problem in a simple polygon. *Pattern Recogn. Lett.*, 4(6):449–451, 1986.